Université de Strasbourg
Adriano Marmora, marmora@math.unistra.fr

Master 1 Semestre 1, 2026-2027
Feuille de TD

Algèbre I

Modules

Dans les exercices qui suivent A est un anneau associatif unitaire, non-nul, qui n'est pas supposé commutatif, sauf lorsque c'est explicitement indiqué. Par « A-module » nous sous-entendons A-modules à gauche.

Exercice 1. Soit I un idéal à gauche de A. Notons IM l'ensemble des sommes finies $\sum a_i m_i$ avec $a_i \in I$ et $m_i \in M$. Montrer que c'est un sous-A-module de M.

Exercice 2. Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules.

1. Montrer que f est un isomorphisme si, et seulement si, il est bijectif.

2. Montrer que le morphisme naturel

$$M/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$$

est un isomorphisme de A-modules.

Exercice 3. Soit M un A-module et soit N un sous-module de M

1. Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des sous-modules de M contenant N et l'ensemble des sous-modules de M/N.

2. Que signifie cet énoncé lorsque $M = A$?

Exercice 4. Soit

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de A-modules.

1. Rappeler la définition de suite exacte courte.

2. Montrer que si M' et M'' sont de type fini alors M est aussi de type fini.

3. Montrer que l'implication réciproque est fausse.

Exercice 5. Donner un exemple de

1. A-module non libre ;

2. famille libre à n élements de A^n qui ne soit pas une base ;

3. famille génératrice minimale d'un A-module qui ne soit pas une base ;

4. A-module libre possédant un sous-module qui ne le soit pas ;

5. A-module possédant un sous-module qui ne soit pas facteur direct.

Exercice 6. Soit M un A-module de type fini et $\phi\colon M \to A^n$ un homomorphisme surjectif. Montrer que $\ker\phi$ est de type fini.

Exercice 7. Supposons que l'anneau A est commutatif (et non-nul).

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Cayley-Hamilton) Soient M un A-module de type fini, $\mathfrak{a}$ un idéal de A et ϕ un endomorphisme de M tel que $\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Alors il existe $a_1, \dots a_n$ dans A tels que

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

1. Soit R un anneau commutatif non-nul, $Q \in M_n(R)$ une matrice $\mathrm{Com}(Q)$ sa co-matrice. Montrer que la formule

$$\mathrm{Com}(Q)^t Q = \det(Q)\mathrm{I}_n$$

est valable (où l'exposant t dénote la matrice transposée et I_n désigne la matrice identité).

2. Choisir un système de générateurs $x_1, \dots x_n$ de M et écrire $\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$, avec $a_{i,j} \in \mathfrak{a}$, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{i,j}\phi - a_{i,j})x_j = 0, \tag{1}$$

où $\delta_{i,j}$ dénote le delta de Kronecker.

3. Notons Θ la matrice $(\delta_{i,j}\phi - a_{i,j})_{i,j}$, elle a ses coefficients dans quel anneau ? Choisir un anneau commutatif R tel que $\Theta \in M_n(R)$.

4. Multiplier (1) à gauche par la transposé de la comatrice et conclure.

Exercice 8. Supposons que l'anneau A est commutatif et non-nul.

1. Montrer que $A^m \simeq A^n$ si, et seulement si, $m = n$.

2. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $A^m \to A^n$ si, et seulement si, $m \geq n$.

3. Qu'en est-il pour les injections ?